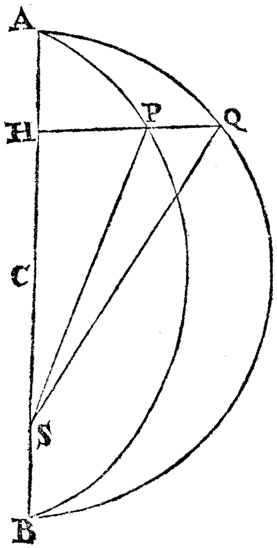
I. *Problematis* Kepleriani, *de inveniendo vero Motu Planetarum, areas tempori proportionales in Orbibus Ellipticis circa Focorum alterum describentium, Solutio* Newtoniana ; à D. J. Keill, *Astr. Prof. Savil.* Oxon. *& R. S. S. demonstrata & exemplis illustrata.*

KEPLERUS primus demonstravit, Planetas non in Orbibus Circularibus, sed Ellipticis, deferri; Solemq; in Ellipseos focorum uno situm ea ratione circumire, ut Radius à Planeta ad Solis centrum protensus, semper verrat Areas Ellipticas, quæ temporibus quibus describuntur sunt proportionales.

Divinum hoc sagacissimi *Kepleri* Inventum, exactissimis *Tychonis Brahe* Observationibus debetur; & tanto magis est suspiciendum, quòd illius ope, Universale motuum leges, totiusq; Mundani Systematis Philosophiam felicissime patefecerit Dominus *Newtonus*.

Cum itaq; tali lege moveantur circa Solem Planetæ, quo ipsorum loca in proprijs Orbitis ad datum tempus determinentur, necesse est ut solvetur Problema quod sequitur.

Invenire Positionem rectæ, quæ per datæ Ellipseos focum alterutrum transiens, abscindat Aream motu suo descriptam, quæ sit ad Aream totius Ellipseos in ratione data.



Sit nempe Ellipsis A P B, cujus focus alteruter S. Invenienda est positio rectæ S P, quæ abscindat Aream trilineam A S P, ad quam Area totius Ellipseos eandem rationem habet, quam tempus Periodicum Planetæ Ellipsim describentis, ad aliud tempus datum; quâ inventâ dabitur punctum P ubi planeta ad tempus illud datum versatur. Vel sit A Q B semicirculus supra Ellipseos axem majorem descriptus, ducenda est per S recta S Q abscindens Aream A S Q, ad quam Area totius circuli est in eadem ratione: si enim ex Q demittatur in Axem perpendicularis Q H, Ellipsi occurrens in P, ducta S P dabit Aream Ellipticam quæsitam; & punctum P erit locus Planetæ ad datum tempus. Est enim semisegmentum Ellipticum A P H ad semisegmentum circulare A Q H, ut H P ad H Q, hoc est, ut area totius Ellipseos ad aream totius Circuli; sed est triangulum S P H ad triangulum S Q H in eadem ratione P H ad Q H: Adeoq; Area ASP est ad Aream totius Ellipseos, ut area A S Q ad aream totius Circuli. Unde si habeatur methodus secandi in datâ ratione Aream circuli, rectâ ductâ per datum punctum S, facile erit hac ipsa ratione secare Aream Ellipticam.

Ipsi

Ipsi *Keplero*, qui primus Problema proposuit, nulla innotuit Methodus directa computandi locum Planetæ ex dato tempore ; sed illi necesse fuit, per singulos gradus semicirculi A Q B progrediendo, ex dato arcu A Q, quam vocat Anomaliam Excentri, tam tempus per aream A S Q, quæ Anomaliæ mediæ est proportionalis, quam angulum A S P, hoc est locum Planetæ, seu Anomaliam coæquatam huic tempori respondentem, calculo eruere.

Cum itaq; difficilis fuit hujus Problematis solutio, Astronomi ad alias transiverant Hypotheses, fingendo punctum aliquod circa quod motus foret æquabilis, seu tempori proportionalis, & exinde datâ Anomaliâ mediâ, coæquatam determinabant. Sed computus hisce hypothesibus innixus, observationibus non congruere deprehensus est : Itaq; Geometræ varias adhibuerunt approximationes, quibus ex datâ Areâ A S Q tempori Analogâ, angulus A S P, hoc est Planetæ locus, quam proxime eliciatur. At horum omnium facillima, & ad Praxim maxime expedita, mihi videtur esse illa methodus quam tradit Dominus *Newtonus* in *Principiis*, *pag.* 111 & 112. *Edit.* 1*mæ*. quæ fere similis est ei, qua ex æquationibus affectis extrahunt Radicem Analystæ ; & quidem tanto magis est æstimanda, quod non solum exhibeat Planetarum loca, quorum orbitæ ad Circuli formam proxime accedunt, sed eadem fere facilitate inservit etiam Cometis, qui in orbitis maxime excentricis moveantur.

Hanc itaque methodum in gratiam Artificum, qui Tabulas Astronomicas secundum veras motuum leges, & non ex fictis hypothesibus condere volunt, hic exponendam duxi.

Sit itaq; A Q B semicirculus supra Axem majorem Ellipseos descriptus, cujus centrum C, & focus in quo Sol locatur sit S. Ducatur C Q, in quam (si opus sit) productam cadat perpendicularis S F. Est Area A S Q = sectori A C Q + Triang. C S Q = $\frac{1}{2}$ CQ × A Q + $\frac{1}{2}$ C Q × S F ; adeoq; ob datam $\frac{1}{2}$ C Q erit Area A S Q semper

Fig. 2.

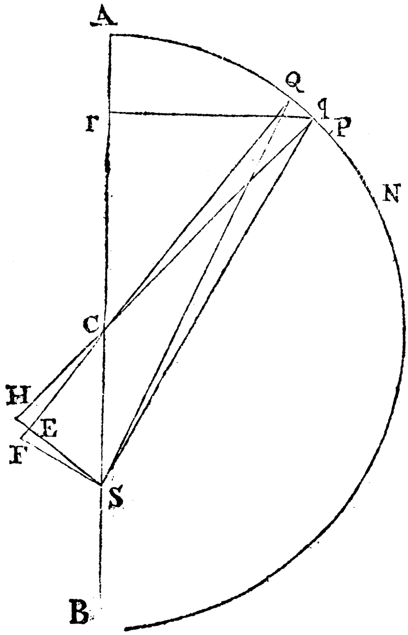


Fig. 4.

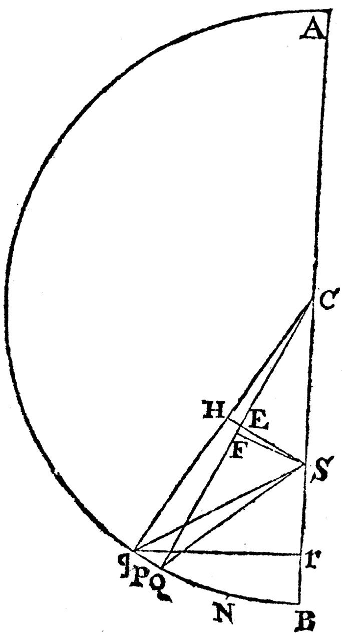
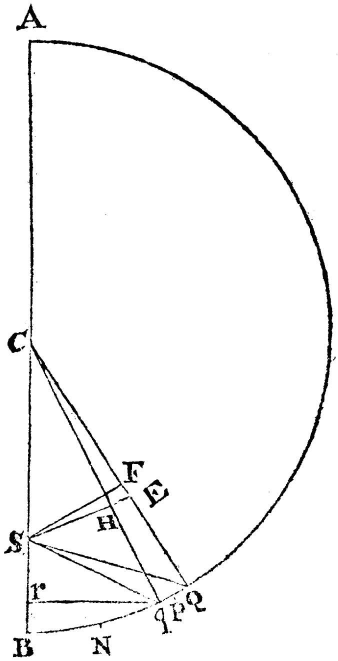


Fig. 3.



proportionalis arcui A Q + recta S F, cum scil. motus sit ab Aphelio versus Perihelium: at cum à Perihelio ad Aphelion tendit Planeta, ut in Figura quarta, fit Area B S Q = sectori B C Q — Triang. C S Q, adeoq; erit illa proportionalis arcui B Q — recta S F. Hinc si capiatur Arcus A N in Fig. 2. & 3. & B N in Fig. 4. temporibus proportionalis, erit A Q + S F = A N, & B Q — S F = B N: unde S F erit = Q N, modo arcus A N vel B N sint proportionales temporibus quibus describuntur areæ A S Q vel B S Q. Ut vero inveniatur in gradibus eorumque partibus mensura arcûs in peripheria A Q B, qui sit æqualis rectæ S F, Fiat ut C Q ad C S ita arcus graduum 57,29578 (qui æqualis est C Q radio) ad arcum quartum, qui æqualis erit C S. Sit arcus ille B. Est autem C S ad S F ut Radius ad sinum anguli S C F vel A C Q. Fiat itaq; ut Radius ad sinum anguli A C Q vel arcûs A Q, ita arcus B ad alium D; erit arcus ille D æqualis rectæ S F, adeoq; si, ad datum tempus, Area A S Q esset tempori proportionalis, esset Arcus D = N Q: & capiendo arcum N P = D, punctum P caderet in Q. Si vero Area A S Q non exacte tempori respondeat, punctum P cadet supra vel infra Q, prout Area A S Q major sit vel minor verâ Areâ quæ tempori respondeat. Sit ea A S q & in C q cadat perpendicularis S H: erit per hactenus demonstrata S H = N q. At est S F = N P, unde erit S H — S F vel S F — S H, hoc est fere H E = q P = Q P — Q q vel = Q q — Q P: Et si angulus Q C q sit parvus, erit C H : C Q : : H E : Q q : : Q P — Q q : Q q, unde C Q + C H : C Q : : Q P : Q q, cum arcus A Q est quadrante minor. At cum is est quadrante major, erit C Q — C H : C Q : : Q P : Q q. Et similiter cum arcus B Q est quadrante minor, erit C Q — C H : C Q : : Q P : Q q.

Si angulus A C Q vel B C Q parvus sit, h. e. si Planeta prope Apsides versetur, erit ut C A $\pm$ C S : C A : : Q P : Q q.

Fiat

Fiat ut C S ad CQ ita Radius R ad longitudinem quandam L, erit $CQ = \frac{CS \times L.}{R}$. Est vero Radius ad cosinum anguli A C Q ut SC ad CF vel CH (sunt enim CH & CF fere æquales) quare erit $CH = \frac{SC \times cos. ACQ}{R}$, adeoq; $QP : Qq :: \frac{CS \times L + CS \times cos.\ ACQ}{R} : \frac{CS \times L}{R} :: L + cos.\ ACQ : L$, cum arcus A Q sit quadrante minor. At si A Q sit quadrante major, erit $QP : Qq :: L - cosin.\ ACQ : L$.

Atque hac ratione si capiatur utcunq; arcus A Q, qui aliquantisper minor sit aut major vero, invenietur exinde arcus Qq huic addendus aut demendus, qui facit ut Area A S q sit quam proxime tempori proportionalis. Et si loco A Q capiatur arcus A q, & instituatur processus priori similis, invenietur alius A q, qui similiter eundem repetendo processum dabit alium A q, atq; sic quantumvis proxime ad veritatem accedere licebit.

Invento angulo A C q, facile habebitur angulus A S q, cum in triang. q C S dentur latera C q & C S & angulus q C S. Dabitur exinde angulus C S q cujus tangens diminuendus est in ratione axis minoris Ellipseos ad majorem, ut tandem habeatur tangens anguli A S P. Vel sic forte facilius investigatur angulus A S P. Sit F numerus qui exprimit longitudinem C S in partibus qualium C Q est 100000: a puncto q ad axem demittatur perpendicularis q r, qui erit sinus arcus dati A q, & erit C r ejusdem cosinus & $Sr =$ summæ vel differentiæ rectarum C r, C S, hoc est $Sr = F \pm cosin.\ ACq$: adeoq; in rectangulo triangulo r S q, datis S r, r q, invenietur angulus r S q. Hinc si in unam summam addantur sinus Log. ang. A C q, complementum Arithmeticum Logarithmi S r, & Logarithmus rationis axis minoris Ellipseos ad majorem dabitur Tangens anguli A S P.

Tanta

Tanta autem eſt hujus methodi facilitas ut ea exemplis magis quam ulteriori explicatione indigeat; adeoq; licebit eam in motibus Planetæ Martis experiri, in cujus orbita, ſecundum Tabulas *Carolinas*, Excentricitas eſt ad diſtantiam mediam ut 14100 ad 152369, adeoque Logarithmus arcus B, qui æqualis eſt rectæ S C, erit 0,7244451. Erit etiam in hoc exemplo L partium 1080631 qualium Radius eſt 100000: Inveniendus ſit angulus A C Q cum motus medius, ſeu arcus tempori proportionalis ab Aphelio computatus, ſit unius Gradus. Quoniam C S ſit hic fere pars decima ipſius C A, pono Arcum A Q eſſe 0,9 grad. decima ſcil parte minorem motu medio. Addatur ſinus Logarithmicus arcus A Q ad Log. B, & fit ſumma 8,9205471 = Log. numeri 0. 083281 qui numerus exprimit arcum æqualem rectæ S F = N P. Et ſi arcus A Q eſſet recte aſſumptus, foret AN—NP = AQ, & Q P = 0. At hic eſt Q P = 0, 016719, a quo ſi auferatur ejus pars undecima, cum A S ſuperat A C undecima circiter ipſius parte, reſtabit Q q = 0,0152; qui additus ad A Q dat A q = 0.9152, qui ne milleſima gradus parte a vero A q differt. Sit ſecundò Arcus A N ſeu motus medius = 2 gr. Pono A Q = 1,83 prioris A q fere duplum, & ad ejus ſinum Log. addatur Log. B: erit ſumma 9. 2286997 = Log. numeri 0,16931, unde erit Q P 0,00069; a quo ſi ſubducatur ejus pars undecima, fit Q q = 0,00063, & A q = 1,83063, qui ne decies milleſima gradus parte a vero A q diſcrepat. Eodem modo ſit motus medius ſeu arcus tempori proportionalis grad. 3. Fiat arcus A Q 2,745 = 1,83 + 0,915, & ad ejus ſinum Log. addendo Log. B, habebitur Log. numeri 0,25392 = NP, & A N—NP = 2,74608, adeoq; Q P = 0,00108, unde Q q fere = 0,001 & A q = 2,746. Sic unica duorum Logarithmorum additione invenietur arcus A q, qui erit verus ad gradus partes milleſimas.

Si jam non gradatim ſed per ſaltum pergendo, inveniendus ſit angulus A C q, cum motus medius eſt grad. 45. Pono arcum A Q eſſe graduum 40, & ad ſinum ejus Logarith-

garithmicum addendo Log. B fit ſumma 0.5325125 = Log.numeri 3,4081; qui numerus à 45 ſubductus relinquit AN—NP = 41,5919, cujus exceſſus ſupra arcum AQ eſt 1,5919. Unde ſi fiat ut L + coſ. ACQ ad L ita 1,5919 ad alium, invenietur arcus Qq eſſe graduum 1.4865, adeoq; Aq = 41,4865, qui non multum ſupra milleſimam gradus partem à vero differt. Verum abſq; hac proportione inveniri poteſt Aq, capiendo novum arcum AQ, qui ſit aliquantulum minor quam AN—NP, eidem tamen fere æqualis; ſcil. ſit AQ = 41.50, & addendo Log. datum B ad ejus ſinum Log. habebitur alter NP = 3.35131, qui ab AN ſubductus dat 41,4869 pro novo Aq: & hic arcus minore labore eruitur, & aliquanto propius ad verum accedit quam prior Aq.

Poſt inventum Aq correſpondentem motui medio 45°, rurſus gradatim pergendo, unica duorum Logarithmorum additione, habebitur Aq, ad omnes motus medij gradus ſubſequentes. Nempe cum motus medius ſit grad. 46, pono AQ = 42,40. & addendo ejus ſinum Log. ad conſtantem B, fiet AN—NP = 42,4249; cui arcui ſi novus AQ æqualis ponatur, habebitur Aq, qui ne milleſima gradus parte à vero Aq diſcrepabit. Sic cum motus medius ſit 47°, pono AQ = 43,36 = priori Aq + incremento iſtius arcus pro uno gradu motus medij, & addendo ejus ſinum Log. ad Log. B, fit ſumma = Log. numeri 3,6402, qui ab AN ſubductus relinquit AN—NP = 43,3598 = novo Aq, qui circiter gradus parte decies milleſima á vero Aq diſcrepat.

Si omiſſis gradibus intermedijs inveniendus eſſet arcus Aq, cum motus medius ſit gr. 100. Pono AQ grad. 96, & addendo ejus ſinum Log. ad Log. B, fit ſumma = Log. numeri 5,273 unde, AN—NP = 94,727. Itaque pono ſecundo AQ = 94,72 & addendo ejus ſinum ad Log. B, habebitur Log. numeri 5,285, qui ab AN ſubductus dat AN—NP = 94,715 = Aq quam proxime. Similiter ſi motus medius ſit grad. 101, pono AQ eſſe 95,71,

cujus sinus Log. ad Log. B additus dat Log. numeri 5,2756; quo numero ab 101 sublato, restabit AN — NP = 95, 7244 = Aq. Atq; hac ratione, dato motu medio, si gradatim fiat processus, habebitur angulus ad centrum per unicam tantum duorum Logarithmorum additionem; quorum unus, qui constans est, in charta seorsim servandus, quo labori sæpius eundem exscribendi parcatur.

Transeamus jam ad Orbitam alterius speciei, talem nempe ut distantia Aphelij sit ad distantiam Perihelij ut 70 ad 1; qualis fere est istius Cometæ Orbita quem Periodum suam annis $75\frac{1}{2}$ complere primus deprehendit Sagacissimus Astronomus & Geometra D. *Edmundus Halleius*, Geometriæ Professor *Savilianus*. In hac Orbita erit AC vel CQ partium 35,5, & CS 34.5 qualium SB est una. Et inveniendus est arcus Bq, cum motus medius est gradus pars centesima. Quoniam media distantia trigesies & quinquies circiter superat distantiam minimam, pono BQ = 0,35, cum motus medius est 0,01. In hac Orbita invenitur constans Log. B = 1.7457133. Hic itaq; Log. ad sinum Log. arcus 0,35 additus dat Log. numeri 0,34013, qui ad arcum 0,01 additus erit = 0,35013. Si hæc summa esset æqualis 0,35, arcus BQ esset recte assumptus: sed differentia est 0,00013. Unde quoniam CB est ad SB ut 35,5 ad 1, multiplicetur differentia 0,00013 per 35,5, & prodibit Qq = 0,004615; unde erit arcus Bq = 0,354615, qui vix per partes tres decies-millesimas a vero discrepat.

Sit secundo motus medius 0,02, & ponatur BQ esse 0,71. Ad ejus sinum Log. addendo Log. B, fit summa = Log. numeri 0,68998, unde BN + NP = 0,70998, adeoq; arcus assumptus BQ = 0,71 nimius fuit: & est differentia = 0,00002, quæ si per 35,5 multiplicetur & productus a BQ subducatur, restabit Bq = 0,7092, vix gradus parte decies-millesima à vero aberrans.

Sit motus medius 0,03. Ponatur BQ esse 1°,06: addendo ejus Log. sin, ad Log. B, fit summa = Log. numeri 1,03008,

cui ſi addatur B N = 0,03, fit ſumma 1,06008, qui numerus major eſt quam B Q; quare ſi differentia 0,00008 per 35,5 multiplicetur & ad B Q addatur, erit B q = 1,06284. Similiter cum motus medius ſit 0,04, pono B Q = 1°,40 & invenio N P = 1,3604; ad quem numerum addendo B N = 0,04 fit ſumma = 1,4004 qui ſuperat 1,40 per 0,0004. Multiplicetur hæc differentia per 35,5 & productus 0,01420 erit æqualis Q q, unde B q = 1,41420. In hiſce omnibus errores ſunt admodum exigui, & raro milleſimam gradus partem tranſcurrentes.

Inveniendus ſit jam arcus B q, cum motus medius ſit æqualis uni gradui. Pono B Q = 20°, & addendo ejus ſinum Log. ad Log. B, habebitur Log. numeri 19,045; cui addendo B N = 1°, ſumma 20,045 ſuperat 20 per ,045: Et cum in hoc caſu L — coſin B Q eſt ad L ut 1 ad 11.5 fere, multiplico differentiam ,045 per 11,5, & productus ,5175 ad B Q additus facit 20,5175. Pono igitur ſecundo B Q = 20,51, & prodibit, ſimiliter ut in præcedentibus, N P = 19.5092; cui addendo B N fit ſumma 20,5092, quæ minor eſt quam B Q: unde ſi differentia 0,0008 multiplicetur per 11,5, & productus 0,0092 ſubſtrahatur a B Q, reſtabit B q = 20,5008.

Sit deniq; motus medius æqualis duobus grad. Pono B Q grad. 30, & invenitur N P = 27,84, cui addendo gradus duos, ſumma 29.84 minor eſt quam 30; & ſi multiplicetur differentia 0,16 per 6,3 (nam L — coſ. B Q eſt ad L ut 1 ad 6,3 ferè) fiet 1,008 = Q q; adeoq; hic arcus a B Q ſubductus dat B q = 28,982: Ut vero corrigatur B q, aſſumo ſecundo B Q = 29°, & ſimili proceſſu invenietur B q = 28,9672.

II. *De*